1 INTRODUÇÃO À TEORIA DA PROBABILIDADE

A Estatística, desde as suas origens (antigo Egito – 2000 anos a.C.) até meados do século XIX, se preocupava apenas com a organização e a apresentação de dados de observação coletados empiricamente (Estatística Descritiva). Somente com o desenvolvimento da teoria das probabilidades foi possível que a Estatística se estruturasse organicamente e ampliasse seu campo de ação, através da criação de técnicas de amostragem mais adequadas e de formas de relacionar as amostras com as populações de onde provieram (Inferência Estatística).

A probabilidade é uma área relativamente nova da matemática (considerando a idade da matemática) que tem como finalidade a modelagem de *fenômenos aleatórios*. Modelar significa conhecer matematicamente. Uma das funções da matemática é a criação de modelos que possibilitem o estudo dos fenômenos da natureza. Ao estudar um fenômeno, temos sempre o interesse de tornar a sua investigação mais precisa e, para isso, tentamos formular um modelo matemático que melhor o explique.

Dependendo do fenômeno que esta sendo estudado, os modelos matemáticos podem ser de dois tipos:

- **Modelos Determinísticos**

Refere-se a um modelo que estipule que as condições sob as quais um experimento seja executado *determinem* o resultado do experimento. O **modelo determinístico** requer o uso de parâmetros pré-determinados em equações que definem processos precisos. Em outras palavras, um modelo determinístico emprega "Considerações Físicas" para prever resultados.

Exemplo: Se o deslocamento de um objeto é definido pela expressão $\boldsymbol{s=v.t}$ e são conhecidos os valores de **v** (velocidade) e **t** (tempo), então o valor de s fica implicitamente determinado.

- **Modelos Não Determinísticos ou Probabilísticos**

São aqueles que informam com que chance ou probabilidade os acontecimentos podem ocorrer. Determina o "grau de credibilidade" dos acontecimentos. (Modelos Estocásticos). Em outras palavras, um modelo probabilístico emprega uma mesma espécie de considerações para especificar uma distribuição de probabilidade.

Exemplo: O nascimento de um bovino. Não é possível determinar o sexo do recém nascido, somente a sua probabilidade de ocorrência: 0,5 para fêmea e 0,5 para macho.

1.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS EM PROBABILIDADE

Os conceitos fundamentais em probabilidade são: experimentos aleatórios, espaço amostral e eventos.

1.1.1 Experimento aleatório (E)

Qualquer processo aleatório, capaz de produzir observações, os resultados surgem ao acaso, podendo admitir repetições no futuro. Um experimento aleatório apresenta as seguintes características:

a - os resultados podem repetir-se n vezes ($n \to \infty$) ;

b - embora não se possa prever que resultados ocorrerão, pode-se descrever o conjunto de resultados possíveis;
c - a medida que se aumenta o número de repetições, aparece uma certa regularidade nos resultados.

Exemplos:

E1 – lançar um dado e observar o número na face superior.
E2 – lançar uma moeda e observar o valor na face superior.
E3 – lançar um dado e uma moeda, nesta sequência, observar os valores nas faces superiores.
E4 – um casal deseja ter três filhos e observar o sexo, de acordo com a ordem de nascimentos das crianças.

1.1.2 Espaço Amostral (S)

É o conjunto de todos os resultados possíveis, de um experimento aleatório. Quanto ao número de elementos pode ser:

a) Finito: Número limitado de elementos;

Exemplos: Considere os experimentos aleatórios apresentados anteriormente:
No E1 - S={1, 2, 3, 4, 5, 6}
No E2 - S={k, c}, onde k=cara, C=coroa
No E3 - S={1k, 2k, 3k, 4k, 5k, 6k, 1c, 2c, 3c, 4c, 5c, 6c}
No E4 - S={MMM, MMF, MFM, MFF, FMM, FMF, FFM, FFF}

b) Infinito: Número ilimitado de elementos, pode ser sub-dividido em:

- **Enumerável:** Quando os possíveis resultados puderem ser postos em concordância biunívoca com o conjunto dos números naturais (N) (caso das variáveis aleatórias discretas). Ex.: N
- **Não Enumerável:** Quando os possíveis resultados não puderem ser postos em concordância biunívoca com o conjunto dos números naturais (caso das variáveis aleatórias contínuas). Ex.: R

1.1.3 Evento (A)

Um evento (A) é qualquer subconjunto de um espaço amostral (S). Pode-se ter operações entre eventos da mesma forma que se tem com conjuntos, como se mostra a seguir.

Exemplo: Considere o experimento aleatório E3, com seu respectivo espaço amostral S={1k, 2k, 3k, 4k, 5k, 6k, 1c, 2c, 3c, 4c, 5c, 6c}. São eventos para esse experimento:

A = ocorrência de valor cara (K)
B = ocorrência de valor par
C = ocorrência de valor coroa (C)
D = ocorrência de valor ímpar
E = ocorrência de número primo
F = ocorrência de valor maior que 4
G = ocorrência de valor menor ou igual a 3
H = ocorrência de valor par **ou** cara (K)
I = ocorrência de valor par **ou** ímpar

J = ocorrência de valor par **e** cara (K)
K = ocorrência de valor par **e** ímpar
L = ocorrência de valor maior que 7

1.1.4 Operações com Eventos

a) A união B: Símbolo utilizado "U", é o evento que ocorrerá se, e somente se, A ou B ou ambos ocorrerem;

b) A interseção B: Símbolo utilizado "∩", é o evento que ocorrerá se, e somente se, A e B ocorrem simultaneamente.

c) Complementar de A: Simbologia "Ā" ou "Ac" é o evento que ocorrerá se, e somente se A não ocorrer.

1.1.5 Tipos de eventos

a) Evento certo: É aquele evento que se igual ao espaço amostral S.

Exemplo: O **evento I** acima é um evento certo.

b) Evento impossível: É aquele evento que não possui elemento algum.

Exemplo: Os **eventos K e L** acima são eventos impossíveis.

c) Eventos Mutuamente Excludentes: São ditos eventos mutuamente excludentes, quando a ocorrência de um implica ou não ocorrência de outro, isto é, não pode ocorrer juntos, e consequentemente, $A \cap B$ é o conjunto vazio ($\varnothing$).

Exemplo: Considere os eventos descritos acima:
Os eventos **A** e **C** são mutuamente exclusivos pois $A \cap C = \varnothing$.
Os eventos **B** e **D** são mutuamente exclusivos pois $B \cap D = \varnothing$.
Os eventos **C** e **J** são mutuamente exclusivos pois $C \cap J = \varnothing$.
Os eventos **H** e **J** não são mutuamente exclusivos pois $H \cap J \neq \varnothing$.

d) Eventos Independentes: São aqueles cuja ocorrência de um evento, não possui efeito algum na ocorrência do outro.

e) Eventos Dependentes ou Condicionados: Existem varias situações onde a ocorrência de um evento pode influenciar fortemente na ocorrência de outro.

e) Eventos Complementares: Dois eventos A e B quaisquer são chamados de complementares se: $\mathbf{A \cap B = \varnothing}$ e $\mathbf{A \cup B = S}$.

Exemplo: Considere os eventos descritos no exemplo acima:
Os eventos **A** e **C** são complementares pois $A \cap C = \varnothing$ e $A \cup C = S$.
Os eventos **B** e **D** são complementares pois $B \cap D = \varnothing$ e $B \cup D = S$.
Os eventos **H** e **J** não são complementares pois $H \cap J \neq \varnothing$ e $H \cup J \neq S$.
Os eventos **F** e **K** não são complementares pois $F \cap K \neq \varnothing$ apesar de $F \cup K = S$.
Os eventos **C** e **J** não são complementares pois $C \cup J \neq S$ apesar de $C \cap J = \varnothing$.

1.2 PROBABILIDADE:

A probabilidade de ocorrência de um evento A, P(A), é um número real que satisfaz as seguintes condições:

a) $0 \leq P(A) \leq 1$
b) P(S) = 1
c) Se A e B são **eventos mutuamente exclusivos** então P(A**U**B) = P(A) + P(B)

Principais teoremas :

I) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
II) Se A é um evento impossível de ocorrer (A=∅), então P(A) = P(∅) =0
III) Se A e B são eventos quaisquer, então: P(A**U**B) = P(A) + P(B) - P(B∩A).

A probabilidade deverá ser calculada a partir da fórmula: $\boldsymbol{P(A) = \frac{n(S)}{n(A)}}$. Intuitivamente também pode-se definir probabilidade como:

$$p(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis a A}}{\text{número total de casos possíveis}}$$

Exemplo: Seja o Experimento E o lançamento de um dado e o seu espaço amostral dado por: S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Qual a probabilidade do evento A: Números maiores e iguais a 2?

O Evento A pode ser descrito na forma: A ={2, 3, 4, 5, 6}. Então *n(A) = 5* e *n(S) = 6*. Logo a probabilidade do evento A é $\boldsymbol{P(A) = \frac{n(S)}{n(A)}} = \frac{5}{6}$

1.2.1 Probabilidade Condicional

Ilustração:

Seja o experimento aleatório E: lançar um dado e o evento A = {sair o número 3}. Então: $\boldsymbol{P(A)} = \frac{1}{6}$

Seja o evento B = {sair o número impar} = {1, 3, 5}

Podemos estar interessados em avaliar a probabilidade do evento A estar condicionado à ocorrência do evento B,designado por ***P(A|B)***, onde o evento A é o evento condicionado e o evento B o condicionante. Ou seja, calcular a probabilidade da ocorrência do evento A tendo ocorrido o evento B. Assim $\boldsymbol{P(A \mid B)} = \frac{1}{3}$.

Formalmente a probabilidade condicionada é definida por: "Dado dois eventos quaisquer A e B, denotaremos P(A|B), por $\boldsymbol{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}}$, com P(B)≠0, pois B já ocorreu.

1.2.2 Teorema do Produto

A probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos quaisquer A e B, do mesmo espaço amostra, é igual ao produto da probabilidade de ocorrência do primeiro deles pela probabilidade condicional do outro, dado que o primeiro ocorreu. Assim:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B).P(A \mid B).$$

1.2.3 Independência Estatística

Um evento A é considerado independente de um outro evento B se a probabilidade de A é igual à probabilidade condicional de A dado B, isto é, se: $P(A) = P(A|B)$

Considerando o teorema do produto podemos afirmar que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

1.3 EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1. Determine a probabilidade de cada evento:

a) Uma carta de ouros aparecer ao se extrair uma carta de um baralho de 52 cartas
b) Uma só coroa aparece no lançamento de 3 moedas

Resp: a) 1/4 b) 3/8

2. Dois dados são lançados simultaneamente. Determine a probabilidade de:

a) a soma ser menor que 4;
b) a soma ser 9;
c) o primeiro resultado ser maior que o segundo;
d) a soma ser menor ou igual a 5.

Resp: a) 1/12 b) 1/9 c) 5/12 d) 5/18

3. Em um lote de 12 peças, 4 são defeituosas. Sendo retiradas aleatoriamente 2 peças, calcule:

a) a probabilidade de ambas serem defeituosas;
b) a probabilidade de ambas não serem defeituosas;
c) a probabilidade de ao menos uma ser defeituosa.

Resp: a) 1/11 b) 14/33 c) 19/33

4. Um casal planeja ter 3 filhos. Determine a probabilidade de nascerem:

a) três homens;
b) dois homens e uma mulher.

Resp: a) p = 1/8 b) p = 3/8

5. Um baralho de 52 cartas é subdividido em 4 naipes:copas, espadas, ouros e paus:

a) Retirando-se uma carta ao acaso, qual a probabilidade de que ela seja de ouros ou de copas?
b) Retirando-se duas cartas ao acaso com reposição da primeira carta, qual a probabilidade de ser a primeira de ouros e a segunda de copas?
c) Recalcular a probabilidade anterior se não houver reposição da primeira carta.
d) Havendo reposição, qual a probabilidade de sair a primeira carta de ouros ou então a segunda de copas?

Resp: a) p = 1/2 b) p = 1/16 c) p = 13/204 d) p = 7/16

6. Num grupo de 75 jovens, 16 gostam de música, esporte e leitura; 24 gostam de música e esporte; 30 gostam de música e leitura; 22 gostam de esporte e leitura; 6 gostam somente de música; 9 gostam somente de esporte; e 5 jovens gostam somente de leitura. (Sugestão: utilize o diagrama de Venn)

a) Qual a probabilidade de, ao apontar, ao acaso, um desses jovens, ele gostar de música?
b) Qual a probabilidade de, ao apontar, ao acaso, um desses jovens, ele não gostar de nenhuma dessas atividades?

Resp: a) p = 44/75 b) p = 11/75

7. Uma urna contém 20 bolas numeradas de 1 a 20. Seja o experimento: retirada de uma bola. Considere os eventos: A = {a bola retirada possui um múltiplo de 2}; B={a bola retirada possui um múltiplo de 5}. Então, qual é a probabilidade do evento A U B?

Resp: p = 3/5

1.4 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Lance um dado e uma moeda um após o outro nesta sequencia.

a) Construa o espaço amostral

b) Enumere os resultados seguintes
   I. A ={coroa marcada por par}
   II. B = {cara marcada por ímpar}
   III. C = {Múltiplo de 3}

c) Expresse os eventos
   I. B complementar
   II. A ou B ocorrem
   III. B ou C ocorrem
   IV. A ou B complementar

c) Calcule as probabilidades abaixo:

P(A), P(B), P(C), P(Ā), P(A**U**B) e P(B**U**C)

2. Se A é o evento “Um estudante fica em casa para estudar”. E B é o evento “ o estudante vai ao cinema”, P(A) = 0,64 e P(B) = 0,21. Determine: P(Ac), P(Bc), P(B/A)

3. Se P(A) = ½ ; P(B) = ¼ e A e B são mutuamente exclusivos então:

a) P(Ac)
b) P(Bc)
c) P(A∩B)

4. Se P(A) = ½; P(B) = 1/3 e P(A∩B) = ¼ calcule P(AUB).

5. Qual a probabilidade de duas pessoas aniversariarem no mesmo dia da semana?

6. A probabilidade de 3 jogadores marcarem um penalti é respectivamente: 2/3; 4/5; 7/10 cobrando uma única vez.

a) todos acertarem. (28/75)
b) apenas um acertar. (1/6)
c) todos errarem. (1/50)
d) Ao menos um acertar

7. Numa bolsa com 5 moedas de 1,00 e 10 moedas de 0,50. Qual a probabilidade de ao retirarmos 2 moedas obter a soma 1,50. (10/21)

8. Numa classe há 10 homens e 20 mulheres, metade dos homens e metade das mulheres possuem olhos castanhos. Ache a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ser homem ou ter olhos castanhos. (2/3)

9. A probabilidade de um homem estar vivo daqui a 20 anos é de 0.4 e de sua mulher é de 0.6 . Qual a probabilidade de que:

a) ambos estejam vivos no período ? (0.24)
b) somente o homem estar vivo ? (0.16)
c) ao menos a mulher estar viva ? (0.6)
d) somente a mulher estar viva? (0.36)

10. Um conjunto de 80 pessoas tem as características abaixo:

	BRASILEIRO	ARGENTINO	URUGUAIO	TOTAL
MASCULINO	18	12	10	40
FEMININO	20	05	15	40
TOTAL	38	17	25	80

Se retirarmos uma pessoa ao acaso, qual a probabilidade de que ela seja:

a) brasileira ou uruguaia. (63/80)
b) do sexo masculino ou tenha nascido na argentina. (9/16)
c) brasileiro do sexo masculino. (18/80)
d) uruguaio do sexo feminino. (15/80)
e) ser mulher se for argentino. (5/17)

11. Uma urna contém 5 fichas vermelhas e 4 brancas. Extraem-se sucessivamente duas ficha, sem reposição e constatou-se que a 1ª é branca.

a) qual a probabilidade da segunda também ser branca ? (3/8)
b) qual a probabilidade da 2ª ser vermelha ? (5/8)

12. Um grupo de pessoas está assim formado:

	Médico	Engenheiro	Veterinário
Masc.	21	13	15
Femin.	12	08	17

Escolhendo-se, ao acaso, uma pessoa do grupo, qual a probabilidade de que seja:

a) Uma mulher que fez o curso de medicina ?
b) Uma pessoa que fez o curso de medicina ?
c) Um engenheiro dado que seja homem ?
d) Não ser médico dado que não seja homem ?

13. Numa cidade 40 % da população possui cabelos castanhos, 25% olhos castanhos e 15% olhos e cabelos castanhos. Uma pessoa é selecionada aleatoriamente.

a) se ela tiver olhos castanhos, qual a probabilidade de também ter cabelos castanhos?
b) se ela tiver cabelos castanhos, qual a probabilidade de ter olhos castanhos ? (3/5)
(3/8)

14. Num ginásio de esportes, 26% dos frequentadores jogam vôlei, 36% jogam basquete e 12% praticam os dois esportes. Um dos frequentadores é sorteado para ganhar uma medalha. Sabendo-se que ele joga basquete, qual a probabilidade de que também jogue vôlei ?

15. A probabilidade de um aluno resolver um determinado problema é de 1/5 e a probabilidade de outro é de 5/6. Sabendo que os alunos tentam solucionar o problema independentemente. Qual a probabilidade do problema ser resolvido :

a) somente pelo primeiro ?
b) ao menos por um dos alunos ?
c) por nenhum ?

2 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Ao descrever um espaço amostral (S) associado a um experimento qualquer podemos ter um conjunto formado por elementos não numéricos, como é o caso do lançamento de uma moeda. No entanto, muitas vezes, estaremos interessados na utilização dos recursos da Estatística descritiva, que somente são possíveis com elementos numéricos. Assim para que esses recursos sejam utilizados, é necessário transformar um espaço amostral qualquer em outro numérico. Para isso usamos as variáveis aleatórias.

Para facilitar a compreensão do conceito de variável aleatória, vamos tomar como exemplo o seguinte experimento aleatório.

Exemplo 1: Lançamento de uma moeda honesta três vezes e observação das faces que ocorrem. O espaço amostral do experimento é *S* = {ccc, cck, ckc, kcc, kkc, kck, ckk, kkk}.

Seja X a variável que representa o numero de caras ocorrido nos três lançamentos. Quais são os possíveis valores de X?

X = {0, 1, 2, 3}

$X(ccc) = 3$

$X(cck) = 2$

$X(ckc) = 2$

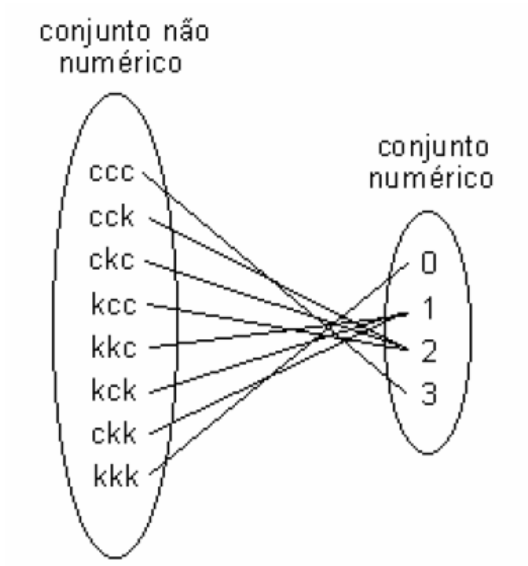
$X(kcc) = 2$

$X(kkc) = 1$

$X(kck) = 1$

$X(ckk) = 1$

$X(kkk) = 0$

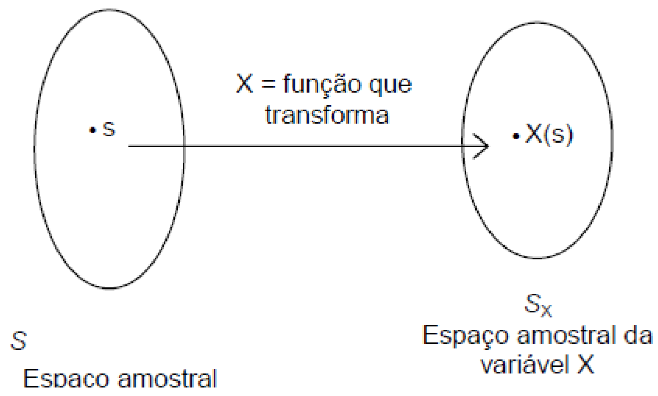


Através de X foi possível transformar um conjunto não numérico com oito pontos amostrais em um conjunto numérico com quatro pontos.

A partir deste exemplo podemos definir:

Variável aleatória (v.a.) é uma função (ou regra) que transforma um espaço amostral qualquer em um espaço amostral numérico que será sempre um subconjunto do conjunto dos números reais.

No exemplo anterior, se X fosse a variável que representa o numero de coroas, os conjuntos seriam os mesmos, mas a função seria outra, pois a correspondência é outra. De modo geral, uma variável aleatória pode ser representada pelo esquema abaixo



As variáveis aleatórias podem ser classificadas como discretas ou continuas. Por questões didáticas e de praticidade, vamos estudar cada tipo separadamente. Inicialmente, abordaremos as variáveis aleatórias discretas e suas principais distribuições de probabilidades. A respeito das variáveis aleatórias contínuas, focaremos nosso estudo em suas distribuições de probabilidade sem estudar suas medidas descritivas.

2.1 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

São discretas todas as variáveis cujo espaço amostral S_X *é enumerável* finito ou infinito. Assim se X é uma variável aleatória discreta, então S_X *é* um subconjunto dos inteiros. No exemplo 1 acima, temos uma v.a. discreta.

Tomemos como outro exemplo o seguinte experimento:

Exemplo 2: Lançamento de uma moeda até que ocorra face cara. Qual será o novo espaço amostral?

O espaço amostral básico deste experimento será *S* = {c, kc, kkc, kkkc, kkkkc, kkkkkc, ...}.

Se definimos a variável aleatória X como o número de lançamentos até que ocorra cara, então, temos

$$S \xrightarrow{X} S_X = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Assim, o espaço amostral S é associado ao conjunto S_X.

2.1.1 Função densidade de probabilidade (fdp)

Quando utilizamos uma v.a. *x* para transformar os valores de um espaço amostral S em um novo espaço amostral constituído de números reais, em geral modificamos também a função de probabilidade associada a este espaço amostral. A função de probabilidade será representada por p(X=x) ou p(x). Essa função associa a cada valor de X a sua probabilidade de ocorrência, desde que satisfaça duas condições:

- $p(x) \geq 0, \forall x \in S_X$
- $\sum p(x) = 1$

Existem três formas distintas de representar uma função:

− *Representação tabular:* consiste em relacionar em uma tabela os valores da função de probabilidade.

− *Representação gráfica:* consiste em representar graficamente a relação entre os valores da variável e suas probabilidades.

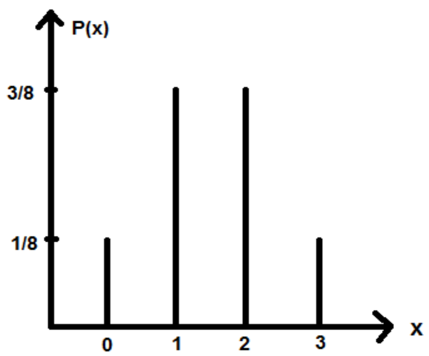
− *Representação analítica:* estabelece uma expressão geral para representar o valor da função num ponto genérico da variável.

Para o Exemplo 1 temos que X representa o número de caras obtidos. Assim para a tabela da função de probabilidade temos:

	X = x	P(X = x)
kkk	0	1/8
ckk	1	1/8
kck	1	1/8
kkc	1	1/8
kcc	2	1/8
ckc	2	1/8
cck	2	1/8
Ccc	3	1/8
	Total	1

<table>
<tr><th></th><th>X = x</th><th>P(X = x)</th></tr>
<tr><td>kkk</td><td>0</td><td>1/8</td></tr>
<tr><td>ckk</td><td rowspan="3">1</td><td rowspan="3">3/8</td></tr>
<tr><td>kck</td></tr>
<tr><td>kkc</td></tr>
<tr><td>kcc</td><td rowspan="3">2</td><td rowspan="3">3/8</td></tr>
<tr><td>ckc</td></tr>
<tr><td>cck</td></tr>
<tr><td>ccc</td><td>3</td><td>1/8</td></tr>
<tr><td></td><td>Total</td><td>1</td></tr>
</table>

Graficamente:



Exemplo 3: No lançamento de dois dados a v.a. **X** anota a soma dos pontos das faces superiores. Determine a função de probabilidade associada a variável **X**.

$$S \xrightarrow{X} R$$

$$(1, 1) \longrightarrow X(1, 1) = 2 \qquad p(1, 1) = \tfrac{1}{36}$$

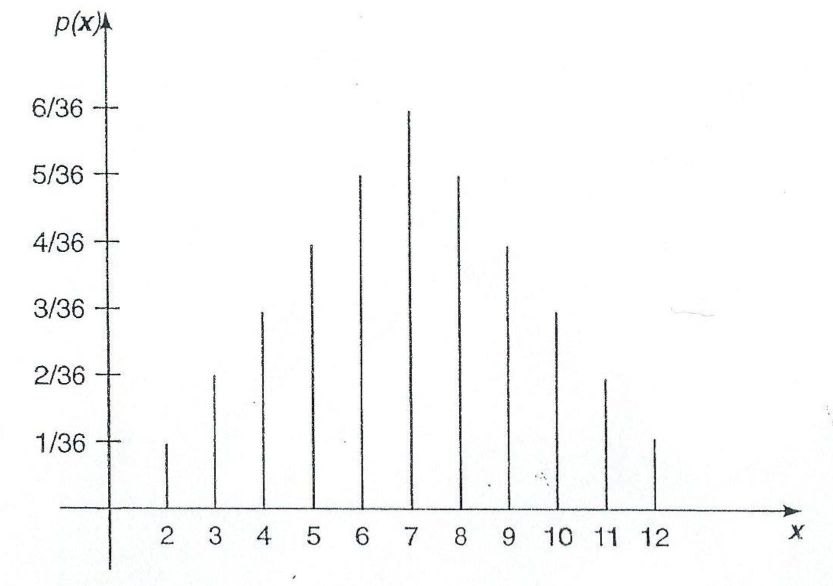
$$(1, 2) \longrightarrow X(1, 2) = 3 \qquad p(1, 2) = \tfrac{1}{36}$$

$$\vdots$$

$$(6, 6) \longrightarrow X(6, 6) = 12 \qquad p(1, 3) = \tfrac{1}{36}$$

Assim, a função de probabilidade associada a variável **X** é:

$$p(2) = \tfrac{1}{36}$$
$$p(3) = \tfrac{2}{36}$$
$$p(4) = \tfrac{3}{36}$$
$$p(5) = \tfrac{4}{36}$$
$$p(6) = \tfrac{5}{36}$$
$$p(7) = \tfrac{6}{36}$$
$$p(8) = \tfrac{5}{36}$$
$$p(9) = \tfrac{4}{36}$$
$$p(10) = \tfrac{3}{36}$$
$$p(11) = \tfrac{2}{36}$$
$$p(12) = \tfrac{1}{36}$$



Em uma tabela temos

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

2.1.2 Medidas Descritivas

Quando estudamos as distribuições de frequências, em Estatística Descritiva, procuramos caracterizar as principais medidas sobre a distribuição, como: média ($\bar{x}$), variância (S^2) e desvio-padrão (S). Nesta situação estávamos lidando com amostras.

A variável aleatória será utilizada para estabelecer modelos teóricos de probabilidade com a finalidade de descrever populações.

- Média ou valor esperado (μ): $\mu = \sum[\boldsymbol{x_i}.\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x_i})]$
- Variância (σ^2): $\sigma^2(\boldsymbol{x}) = \sum[(\boldsymbol{x_i} - \mu)^2.\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x_i})]$
- Desvio-padrão (σ): $\sigma = \sqrt{\sigma^2(\boldsymbol{x})}$

Utilizando o exemplo 1, temos:

x	P(x)	$\boldsymbol{x_i}.\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x_i})$	$(\boldsymbol{x_i} - \mu)^2$	$(\boldsymbol{x_i} - \mu)^2.\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x_i})$
0	1/8 = 0,125	0×0,125= 0	$(0-1{,}5)^2 = 2{,}25$	$2{,}25 \times 0{,}125 = 0{,}281$
1	3/8 = 0,375	1×0,375 = 0,375	$(1-1{,}5)^2 = 0{,}25$	$0{,}25 \times 0{,}375 = 0{,}094$
2	3/8 = 0,375	2×0,375 = 0,75	$(2-1{,}5)^2 = 0{,}25$	$0{,}25 \times 0{,}375 = 0{,}094$
3	1/8 = 0,125	3×0,125 = 0,375	$(3-1{,}5)^2 = 2{,}25$	$2{,}25 \times 0{,}125 = 0{,}281$
$\sum$	1 = 1,000	$\mu = 1{,}5$		$\sigma^2 = 0{,}75$

Assim, o valor esperado (ou média) será $\mu = 1{,}5$, a variância $\sigma^2 = 0{,}75$, e o desvio-pardão será a raiz quadrada da variância, ou seja $\sigma = \sqrt{0{,}75} = 0{,}866$.

2.2 EXERCÍCIOS

1. No lançamento de duas moedas, a v.a. X anota o número de caras obtidas. determine os valores de X e a função de probabilidade associada.

2. No lançamento de dois dados, a variável aleatória X denota a diferença entre os pontos obtidos nas faces superiores. Determine os valores de x e a função de probabilidade associada.

3. A urna A contém 3 bolas brancas e 2 bolas pretas. A urna B contém 5 bolas brancas e 1 bola preta. Uma bola é retirada ao acaso de cada urna e a v.a. *x* anota o número de bolas brancas obtidas. Determine os valores de *x* e a função de probabilidade.

4. Uma carta é retirada aleatoriamente de um baralho comum de 52 cartas, e a v.a. *X* anota o número de damas obtidos nessa retirada. Determinar os valores de *X* e a função de probabilidade associada.

5. A tabela a seguir dá as probabilidades de um oficial de justiça receber 0, 1, 2, 3, 4 ou 5, relatórios de violação de liberdade condicional em um dia qualquer. Encontre a média e o desvio padrão de *X*. (E(x)=1,77 e Dp(x)=1,14)

X	0	1	2	3	4	5
p(x)	0,15	0,25	0,36	0,18	0,04	0,02

6. A tabela abaixo fornece a probabilidade de que um sistema de computação fique fora de operação um dado período por dia durante a fase inicial de instalação do sistema. Calcular:

a) O número esperado de vezes que o computados fique fora de operação por dia. E(x)= 6,78
b) O desvio padrão desta distribuição de probabilidade. Dp= 1,016

Número de período X	4	5	6	7	8	9
Probabilidade p(x)	0,01	0,08	0,29	0,42	0,14	0,06

7. O trem do metrô para no meio de um túnel. O defeito pode ser na antena receptora ou no painel de controle. Se o defeito for na antena, o conserto poderá ser feito em 5 minutos. Se o defeito for no painel, o conserto poderá ser feito em 15 minutos. O encarregado da manutenção acredita que a probabilidade de o defeito ser no painel é de 60%. Qual é a expectativa do tempo de concerto? E(x)= 11min.

8. Uma confeiteira produz cinco bolos em determinado dia. As probabilidades de vender nenhum, um, dois, três, quatro ou cinco valem respectivamente 1%, 5%, 20%, 30%, 29% e 15%. O custo total de produção de cada bolo é R$10,00 e o preço unitário de venda é R$20,00. Calcule o lucro médio, a variância e o desvio-padrão.
E(x)=15,20 - Var(x)=524,96 - Dp=22,91

9. Sabe-se que a chegada de clientes a uma loja de material computacional, durante intervalos aleatoriamente escolhidos de 10 minutos, segue uma distribuição de probabilidade dada na tabela abaixo. Calcule o número esperado de chegada de clientes por intervalo de 10 minutos, e calcule também o desvio padrão das chegadas.
E(x)=2 - Var(x)=1,9

Número de chegadas X	0	1	2	3	4	5
Probabilidade p(x)	0,15	0,25	0,25	0,2	0,1	0,05

10. As vendas de uma revista mensal em uma banca segue uma distribuição de probabilidade dada na tabela abaixo. Calcule o valor esperado e a variância.
E(x)=17,8 - Var(x)=1,66

Número de revistas em Milhares X	15	16	17	18	19	20
probabilidade de X	0,05	0,1	0,25	0,3	0,2	0,1

3 DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

Até o momento, as variáveis aleatórias consideradas não possuíam, necessariamente,qualquer sentido de aplicação. Entretanto, algumas variáveis aleatórias são muitos importantes e, devido a esta importância, surge o interesse em estudar suas distribuições de probabilidade.

Uma distribuição de probabilidade é essencialmente um modelo de descrição probabilística de uma população, entendendo por população o conjunto de todos os valores de uma variável aleatória. As ideias de população e distribuição de probabilidade são, deste modo, indissociáveis e serão, a partir de agora, tratadas como sinônimos. As distribuições de probabilidade formam a espinha dorsal da metodologia estatística, uma vez, que pela sua natureza, a estatística somente trabalha com variáveis cujos valores não ocorrem de modo determinístico.

No estudo de uma variável aleatória é importante saber:

− o tipo de distribuição de probabilidade da variável;
− a função de probabilidade da variável;
− os parâmetros da distribuição;
− as medidas descritivas da distribuição (média, variância, assimetria).

Existem inúmeros modelos descrevendo o comportamento probabilístico de variáveis discretas e contínuas. Nas seções a seguir serão discutidos os principais tipos de distribuições discretas e contínuas.

3.1 DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE DE VARIÁVEIS DISCRETAS

As distribuições discretas mais importantes e utilizadas são: Bernoulli, Binomial, Poisson, Hipergeométrica, Uniforme, Multinomial, Geométrica, Binomial negativa e Hipergeométrica negativa. Todavia, trataremos apenas as três primeiras.

3.1.1 Distribuição de Bernoulli

Esta distribuição foi deduzida no final do século XVII pelo matemático suíço Jacob Bernoulli.

Definição: O experimento (ou ensaio) de Bernoulli é definido como o experimento aleatório que possui apenas dois resultados possíveis.

Exemplo 1: Uma lâmpada é colocada numa luminária. S = {acende, não acende}

Vamos considerar um dos resultados como sucesso, por exemplo, sucesso = acender. Definimos, então, a variável **X** como número de sucessos em uma repetição do experimento.

X = número de sucessos

A variável **X** só poderá assumir dois valores

$$X = \begin{cases} 0, \text{ se a lâmpada não acender} \\ 1, \text{ se a lâmpada acender} \end{cases} \quad \text{, sendo } S_X = \{0, 1\}.$$

Exemplo 2: Uma semente é colocada para germinar. S = {germina, não germina}
Se sucesso = germinar, então, a variável **X** = número de sucessos será

$$X = \begin{cases} 0, \text{ se a semente não germinar} \\ 1, \text{ se a semente germinar} \end{cases} \quad \text{, sendo } S_X = \{0, 1\}.$$

Se for conhecido o poder germinativo do lote de sementes, por exemplo, 87%, então, podemos concluir que a probabilidade de a semente germinar é 0,87. Como o evento {não germinar} e complemento do evento {germinar}, a probabilidade de não germinar será 1 – 0,8 = 0,13.
Temos, então

X = x	0	1	Σ
P(X = x)	0,13	0,87	1

Escrevendo de outra forma:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} = 0) = 0{,}13$$
$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} = 1) = 0{,}87$$

Exemplo 3: O nascimento de um bovino. S = {macho, fêmea}
Se sucesso = fêmea, então, a variável **X** = número de sucessos será

$$X = \begin{cases} 0, \text{ se nascer macho} \\ 1, \text{ se nascer fêmea} \end{cases} \quad \text{, sendo } S_X = \{0, 1\}.$$

Sabe-se que a probabilidade de nascer fêmea é a mesma de nascer macho. Temos, então

X = x	0	1	Σ
P(X = x)	0,5	0,5	1

Ou seja,

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} = 0) = 0{,}5$$
$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} = 1) = 0{,}5$$

- **Função de probabilidade**

De modo geral, se **X** é uma variável que tem distribuição de Bernoulli, então a sua função de probabilidade será:

Representação tabular

X = x	0	1	∑
P(X = x)	(1 - p)	P	1

onde:
p = probabilidade de sucesso
q = (1−**p**) = probabilidade de fracasso

Representação analítica

$$P(X = x) = p^{x}.q^{1-x} \quad , \quad \text{para} \quad S_X = \{0, 1\}$$

- Valor Esperado: $E(x) = \mu = p$
- Variância: $\sigma^2(x) = p.q$

3.1.2 Distribuição Binomial

O termo "Binomial" é utilizado quando uma variável aleatória está agrupada em duas classes ou categorias. As categorias devem ser mutuamente excludentes, de modo a deixar bem claro a qual categoria pertence determinada observação; e as classes devem ser coletivamente exaustivas, de forma que nenhum outro resultado fora delas é possível.

Definição: modelo que descreve probabilisticamente os resultados de uma sequência de experimentos de Bernoulli *independentes*, ou seja, onde a probabilidade de sucesso e sempre a mesma.

Exemplo 1: Em uma estância 60% dos bovinos foram vacinados contra uma determinada doença. Se um bovino dessa estância for escolhido ao acaso, então, teremos um experimento de Bernoulli com *S* = {vacinado, não vacinado}, onde: P(vacinado) = 0,6 e P(não vacinado) = 0,4.

Se três bovinos forem escolhidos ao acaso, então teremos uma sequência de três experimentos de Bernoulli independentes uma vez que, a cada escolha, a probabilidade de sucesso permanecerá inalterada. O espaço amostral deste experimento será *S* = {VVV, VVN, VNV, NVV, NNV, NVN, VNN, NNN}, onde: V = vacinado e N = não vacinado.

Se a variável X é definida como o número de sucessos em **n** experimentos de Bernoulli independentes, com probabilidade de sucesso igual a **p**, então, no exemplo 1, onde **n = 3** e **p = 0,6** (se considerarmos sucesso = vacinado), o espaço amostral da variável X será S_X = {0, 1, 2, 3} e as probabilidades P(X = x) será:

	X = x				**P(X = x)**
NNN	0	0,4×0,4×0,4	$0,4^3$	$1\times0,4^3$	0,064
NNV NVN VNN	1	0,4×0,4×0,6 0,4×0,6×0,4 0,6×0,4×0,4	$0,4^2\times0,6^1$ $0,4^2\times0,6^1$ $0,4^2\times0,6^1$	$3\times0,4^2\times0,6^1$	0,288
VVN VNV NVV	2	0,6×0,6×0,4 0,6×0,4×0,6 0,4×0,6×0,6	$0,4^1\times0,6^2$ $0,4^1\times0,6^2$ $0,4^1\times0,6^2$	$3\times0,4^1\times0,6^2$	0,432
VVV	3	0,6×0,6×0,6	$0,6^3$	$1\times0,6^3$	0,216

Escrevendo de outra forma, temos

$P(X = 0) = 1 . p^0 . q^3 = 1 . 0,6^0 . 0,4^3 = 0,064$
$P(X = 1) = 3 . p^1 . q^2 = 3 . 0,6^1 . 0,4^2 = 0,288$
$P(X = 2) = 3 . p^2 . q^1 = 3 . 0,6^2 . 0,4^1 = 0,432$
$P(X = 3) = 1 . p^3 . q^0 = 1 . 0,6^3 . 0,4^0 = 0,216$

Sendo assim, a distribuição de probabilidade da variável X será

X = x	0	1	2	3	Σ
P(X = x)	0,064	0,288	0,432	0,216	1

- **Função de probabilidade**

De modo geral, se X e uma variável que tem distribuição de Bernoulli, então a sua função de probabilidade será:

$$\boldsymbol{P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^{x} \cdot q^{n-x}} \qquad \text{onde} \quad \boldsymbol{\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}}$$

- Valor Esperado: $\boldsymbol{E(x)} = \mu = \boldsymbol{n.p}$
- Variância: $\sigma^2\boldsymbol{(x)} = \boldsymbol{n.p.q}$

Usando a função de probabilidade para o exemplo 1, temos:

$$\boldsymbol{P(X} = 0) = \binom{3}{0} \cdot 0,60^0 \cdot 0,40^3 = 0,064$$

$$\boldsymbol{P(X} = 1) = \binom{3}{1} \cdot 0,60^1 \cdot 0,40^2 = 0,288$$

$$\boldsymbol{P(X} = 2) = \binom{3}{2} \cdot 0,60^2 \cdot 0,40^1 = 0,432$$

$$\boldsymbol{P(X} = 3) = \binom{3}{3} \cdot 0,60^3 \cdot 0,40^0 = 0,216$$

Com valor esperado $\boldsymbol{E(x)} = 3 \times 0,6 = 1,8$, variância $\sigma^2\boldsymbol{(x)} = 3 \times 0,6 \times 0,4 = 0,72$ e desvio padrão $\sigma\boldsymbol{(x)} = \sqrt{0,72} = 0,85$.

ATENÇÃO: Propriedades necessárias para haver uma utilização da Distribuição Binomial:

→ Número de tentativas fixas;
→ Cada tentativa deve resultar numa falha ou sucesso;
→ As probabilidades de sucesso devem ser iguais para todas as tentativas;
→ Todas as tentativas devem ser independentes.

Exemplo 2: A probabilidade de um atirador acertar o alvo é de 25%. Se ele atirar cinco vezes, qual a probabilidade dele acertar dois tiros?

$$\boldsymbol{n} = 5 \qquad \boldsymbol{x} = 2 \qquad \boldsymbol{p} = 0{,}25 \qquad \boldsymbol{q} = 0{,}75$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^{5-2}$$
$$= \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^3$$
$$= 10 \cdot 0{,}0625 \cdot 0{,}421875$$
$$= 0{,}2637$$
$$= 26{,}37\%$$

Valor esperado:
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = 5 \times 0{,}25 = 1{,}25$$

Variância:
$$\sigma^2(\boldsymbol{x}) = 5 \times 0{,}25 \times 0{,}75 = 0{,}9375$$

Desvio padrão:
$$\sigma(\boldsymbol{x}) = \sqrt{0{,}9375} = 0{,}9682$$

Exemplo 3: Uma moeda é lançada 5 vezes seguidas e independentes. Calcule a probabilidade de serem obtidas 3 caras nessa prova.

$$\boldsymbol{n} = 5 \qquad \boldsymbol{x} = 3 \qquad \boldsymbol{p} = 0{,}50 \qquad \boldsymbol{q} = 0{,}50$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}50^3 \cdot 0{,}50^{5-3}$$
$$= \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 0{,}50^3 \cdot 0{,}50^2$$
$$= 10 \cdot 0{,}125 \cdot 0{,}25$$
$$= 0{,}3125$$
$$= 31{,}25\%$$

Valor esperado:
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = 5 \times 0{,}5 = 2{,}5$$

Variância:
$$\sigma^2(\boldsymbol{x}) = 5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 1{,}25$$

Desvio padrão:
$$\sigma(\boldsymbol{x}) = \sqrt{1{,}25} = 1{,}118$$

3.1.3 Distribuição de Poisson

Quando numa distribuição binomial o tamanho "n" das observações for muito grande e a probabilidade "p" de sucesso for muito pequena, a probabilidade de ocorrência de um determinado número de observações segue uma Distribuição de Poisson. A distribuição de Poisson,foi assim designada em homenagem ao matemático e físico francês Simeon Denis Poisson.

A aplicação da distribuição segue algumas restrições:

- Somente a chance afeta o aparecimento do evento, contando-se apenas com a sua ocorrência, ou seja, a probabilidade de sucesso "p".
- Uma vez não conhecido o número total de eventos, a distribuição não pode ser aplicada.

Definição: modelo que descreve probabilisticamente a sequência de um *grande número* de fenômenos *independentes* entre si, cada um com probabilidade de sucesso *muito pequena*.

Esta distribuição e importante no estudo de variáveis aleatórias de *ocorrência rara* em relação ao numero total de ocorrências, como por exemplo:

→ número de pecas defeituosas observadas em uma linha de produção num determinado período de tempo;
→ número de partículas radioativas emitidas numa unidade de tempo;
→ número de cultivares selecionadas num processo de melhoramento;
→ número de acidentes de trabalho ocorridos numa grande empresa num determinado período de tempo;
→ número de ciclones ocorridos em certa região num determinado período de tempo

- **Função de probabilidade**

De modo geral, se X e uma variável que tem distribuição de Poisson, então a sua função de probabilidade será:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{x!}, \quad \text{para} \quad S_X = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

onde:
x : numero de sucessos;
e : numero base dos logaritmos neperianos = 2,718 (constante);
λ : numero médio de sucessos (sempre maior que zero).
(OBS: Algumas vezes será preciso usar $\lambda = n.p$)

- Valor Esperado: $E(x) = \mu = \lambda$
- Variância: $\sigma^2(x) = \lambda$

Exemplo 1: Um processo mecânico produz tecido para tapetes com uma média de dois defeitos por metro quadrado. Determine a probabilidade de um metro quadrado ter exatamente um defeito, admitindo-se que o processo possa ser bem aproximado por uma distribuição de Poisson.

$$\lambda = 2 \qquad x = 1$$

$$P(X = 1) = \frac{e^{-2} \cdot 2^{1}}{1!}$$
$$= \frac{0{,}135 \cdot 2}{1}$$
$$= 0{,}270$$
$$= 27\%$$

Valor esperado: $E(x) = 5 \times 0{,}25 = 1{,}25$

Variância: $\sigma^2(x) = 5 \times 0{,}25 \times 0{,}75 = 0{,}9375$

Desvio padrão: $\sigma(x) = \sqrt{0{,}9375} = 0{,}9682$

Exemplo 2: Suponhamos que os navios cheguem a um porto à razão de $\lambda = 2$ navios/hora, e que essa razão seja bem aproximada por um processo de Poisson. Observando o processo durante um período de meia hora, determine a probabilidade de

a) não chegar nenhum navio
b) chegarem 3 navios

Obs: $\begin{cases} 2 \ \boldsymbol{navios} \rightarrow 1 \ \boldsymbol{hora} \\ \qquad \lambda \rightarrow 0{,}5 \ \boldsymbol{hora} \end{cases} \Rightarrow \lambda = 1$

a) não chegar nenhum navio.

$\lambda = 1$ e $\boldsymbol{x} = 0$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} = 0) &= \frac{\boldsymbol{e}^{-1} \cdot 1^0}{0!} \\ &= \frac{0{,}368 \cdot 1}{1} \\ &= 0{,}368 \\ &= 36{,}8\% \end{aligned}$$

b) chegarem 3 navios.

$\lambda = 1$ e $\boldsymbol{x} = 3$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} = 3) &= \frac{\boldsymbol{e}^{-1} \cdot 1^3}{3!} \\ &= \frac{0{,}368 \cdot 1}{6} \\ &= 0{,}061 \\ &= 6{,}1\% \end{aligned}$$

Exemplo 3: Uma máquina produz nove peças defeituosas a cada mil peças produzidas. Calcule a probabilidade de que em um lote quem contém 500 peças, não haja nenhuma peça defeituosa.

Observamos que a probabilidade de ocorrer uma peça defeituosa é de 9 em 1.000, ou seja, p = 0,009 = 0,9%. Então usando $\lambda = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{p}$ temos $\lambda = 500 \times 0{,}009 = 4{,}5$. Portanto, a probabilidade de não haver peça defeituosa é:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} = 0) &= \frac{\boldsymbol{e}^{-4{,}5} \cdot (4{,}5)^0}{0!} \\ &= \frac{0{,}0111 \cdot 1}{1} \\ &= 0{,}0111 \\ &= 1{,}11\% \end{aligned}$$

3.2 EXERCÍCIOS (PARTE 1)

1. Dois times de futebol, A e B, jogam entre si 6 vezes. Encontre a probabilidade do time A ganhar 4 jogos. (23,43%)

2. Seis parafusos são escolhidos ao acaso da produção de uma certa máquina, que apresenta 10% de peças defeituosas.

a) Qual a probabilidade de serem defeituosos dois deles? (9,84%)
b) Qual é o valor esperado? E o desvio padrão? (E(x)=0,6 Dp=0,73)

3. Jogando-se um dado três vezes, determine a probabilidade de se obter um múltiplo de 3 duas vezes. (22,22%)

4. Dos estudantes de um colégio, 41 % fumam cigarro. Escolhem-se seis ao acaso para darem uma opinião sobre o fumo. Determine a probabilidade de:

a) nenhum dos seis ser fumante (4,22%)
b) todos os seis fumarem (0,48%)
c) ao menos a metade dos seis ser fumante (47,65%)

5. 12% dos que reservam lugar num vôo faltam ao embarque. O avião comporta 15 passageiros.

a) Determine a probabilidade de que todos os 15 que reservaram lugar compareçam ao embarque. (14,70%)
b) Se houve 16 pedidos de reserva, determine a probabilidade de uma pessoa ficar de fora. (12,93%)

6. Determine a probabilidade de obtermos exatamente 3 caras em 6 lances de uma moeda. (31,25%)

7. Dois jogadores de tênis, Pedro e Gustavo, jogam entre si 5 vezes. Encontre a probabilidade de Pedro:

a) ganhar dois ou três jogos (62,50%)
b) ganhar pelo menos um jogo. (3,12%)
c) Qual é o valor esperado para esses jogos? O que isso significa? (E(x)=2,5)

8. A probabilidade de um atirador acertar o alvo é 2/3. Se ele atirar 5 vezes, qual a probabilidade de acertar exatamente 2 tiros? (16,46%)

9. Uma amostra de 15 peças é extraída, com reposição de um lote que contém 10% de peças defeituosas. Calcule a probabilidade de que:

a) o lote não contenha peça defeituosa; (20,59%)
b) o lote contenha exatamente três peças defeituosas; (12,85%)
c) o lote contenha pelo menos uma peça defeituosa; (79,41%)
d) o lote contenha entre três e seis peças defeituosas; (5,33%)
e) o lote contenha de três a seis peças defeituosas. (18,37%)

10. Calcular o valor esperado e o desvio padrão para o número de peças defeituosas na amostra do problema anterior. (E(x)=1,5 Dp=1,16)

11. Uma confecção de roupa infantil suspeita que 30% de sua produção apresenta algum defeito. Se tal suspeita é correta, determine a probabilidade de que numa amostra de quatro peças, sejam encontradas:

a) no mínimo duas peças com defeitos; (34,83%)
b) menos que três peças boas. (34,83%)

12. Admitindo-se o nascimento de meninos e meninas sejam iguais, calcular a probabilidade de um casal com 6 filhos ter:

a) 4 filhos e 2 filhas (23,43%)
b) 3 filhos e 3 filhas (31,25%)

13. Um time X tem 2/5 de probabilidade de vitória sempre que joga. Se X jogar 5 partidas, calcule a probabilidade de:

a) X vencer exatamente 3 partidas; (23,04%)
b) X vencer ao menos uma partida; (92,22%)
c) X vencer mais da metade das partidas; (31,74%)
d) X perder todas as partidas; (7,78%)

14. Calcular o valor esperado e o desvio padrão para o número de vitórias do time X no problema anterior. (E(x)=2 Dp=1,10)

15. A probabilidade de um atirador acertar um alvo é 1/3. Se ele atirar 7 vezes, qual a probabilidade de:

a) acertar exatamente 2 tiros; (30,73%)
b) não acertar nenhum tiro. (5,85%)

16. Se 5% das lâmpadas de certa marca são defeituosas, achar a probabilidade de que, numa amostra de 100 lâmpadas, escolhidas ao acaso, tenhamos: (use binomial e poisson)

a) nenhuma defeituosa (0,59% e 0,67%)
b) 3 defeituosas; (13,96% e 14,04%)
c) mais do que uma boa; (96,29% e 95,96%)

17. Uma fabrica de pneus verificou que ao testar seus pneus nas pistas, havia em média um estouro de pneu a cada 5.000 km.

a) Qual a probabilidade que num teste de 3.000 km haja no máximo um pneu estourado? (87,81%)
b) Qual é o desvio padrão para um teste de 3.000 km? (0,77)
c) Qual a probabilidade de um carro andar 8.000 km sem estourar nenhum pneu ? (20,19%)
d) Qual é o desvio padrão para um teste de 8.000 km? (1,26)

18. Certo posto de bombeiros recebe em média 3 chamadas por dia. Calcular a probabilidade de:

a) receber 4 chamadas num dia; (16,80%)
b) receber 3 ou mais chamadas num dia; (57,68%)
c) 22 chamadas numa semana. (8,28%)

19. Na pintura de paredes aparecem defeitos em média na proporção de 1 defeito por metro quadrado. Qual a probabilidade de aparecerem 3 defeitos numa parede 2 x 2 m ? Qual o desvio padrão para este problema?

(19,54%)

20. A média de chamadas telefônicas em uma hora é 3. Qual a probabilidade:

a) receber exatamente 3 chamadas numa hora; (14,94%)
b) receber 4 ou mais chamadas em 90 minutos; (34,23%)
c) 75 chamas num dia; (4,33%)

21. Suponha que haja em média 2 suicídios por ano numa população de 50.000 hab. Em uma cidade de 100.000 habitantes, encontre a probabilidade de que um dado ano tenha havido:

a) nenhum suicídio; (1,83%)
b) 1 suicídio; (7,33%)
c) 2 ou mais suicídios. (90,84%)

22. Suponha 400 erros de impressão distribuídos aleatoriamente em um livro de 500 páginas. Encontre a probabilidade de que uma dada página contenha nenhum erro. Qual o desvio padrão para este problema?

(44,93%)

23. A taxa média de chegada de clientes em um posto de serviços é de 0,5 por minuto. Calcular a probabilidade de, em um dado minuto, chegarem dois clientes. Qual é o desvio padrão para este problema?

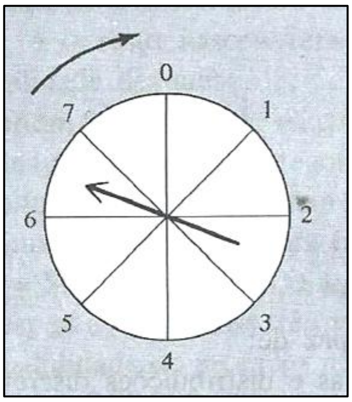
(7,58%)

3.3 DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE DE VARIÁVEIS CONTINUAS

Quando uma variável discreta apresenta um grande número de resultados possíveis, ou quando a v.a. em questão é contínua, não se podem usar as distribuições discretas como a de Poisson ou a Binomial para obter probabilidades. Uma variável discreta com muitos resultados possíveis exigiria uma tabela por demais extensa ou um esforço monumental na utilização de uma fórmula para a obtenção de probabilidades. Já uma variável contínua inclui, em seus resultados, tanto valores inteiros como não-inteiros dificultando os cálculos. Vejamos um exemplo:

Exemplo: O ponteiro da figura ilustra o conceito de variável contínua.Uma vez tenha sido posto a girar, o ponteiro pode parar em qualquer posição ao longo do círculo.

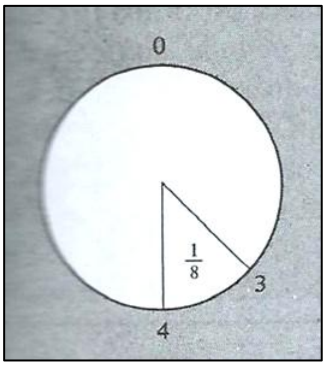
Não se pode esperar que venha parar exatamente num dos valores inteiros do círculo. Considerando-se uma mensuração feita ao longo do círculo, haverá um número extremamente grande de pontos nos quais o ponteiro poderia parar.



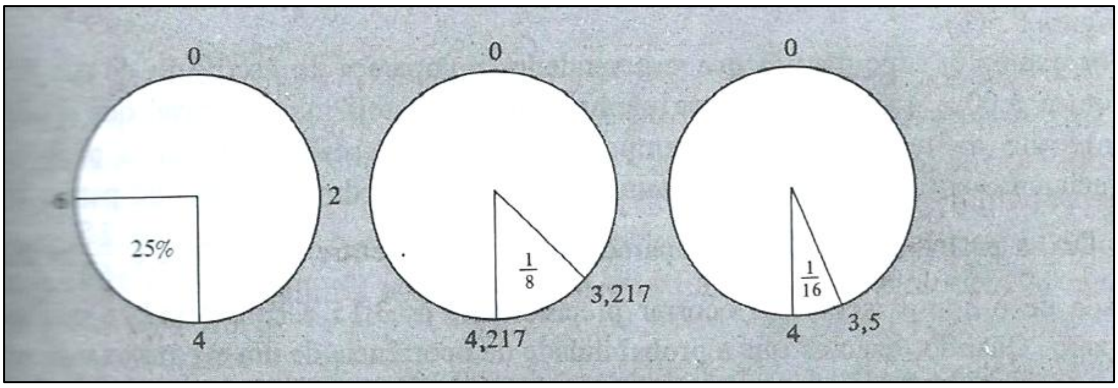
Imaginemos, por exemplo, que o círculo fosse dividido em ao menos 1 milhão de pontos diferentes. A probabilidade de o ponteiro parar exatamente sobre um desses pontos seria 1/1.000.000 ou 0,000001. Ou seja, praticamente zero.

Assim, fica sem sentido falar na probabilidade de se obter um resultado específico. Por isso, durante nosso estudo das distribuições contínuas iremos utilizar o conceito de intervalo, isto é, focalizar a probabilidade de uma variável aleatória contínua tomar um valor num determinado intervalo. Então, enquanto a probabilidade de o ponteiro parar no ponto 3 ou 4 é aproximadamente zero, a de ele parar entre esses dois valores não é zero.

Como círculo está dividido em 8 setores iguais, podemos atribuir a probabilidade de $\frac{1}{8}$ ao resultado "parar entre 3 e 4". Representamos da seguinte maneira: $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}=3)=0$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}=4)=0$ e $\boldsymbol{P}(3 \leq \boldsymbol{x} \leq 4)=\frac{1}{8}=12{,}5\%$.



Analogamente, teríamos uma probabilidade de 25% ao evento "parar entre 4 e 6". E ainda, a probabilidade de 12,5% para o evento "parar entre 3,217 e 4,217". Já para o evento "parar entre 3,5 e 4" a probabilidade seria de 6,25%.



É difícil identificar o tipo de distribuição de probabilidade de uma variável continua. Geralmente e necessário fazer uma pesquisa bibliográfica para saber se a variável de interesse já foi estudada antes e a sua distribuição de probabilidade já foi identificada. Uma das formas de identificar o tipo de distribuição de uma variável continua e observando o campo de variação desta variável.

Existem vários tipos de distribuições continuas, dentre as quais podemos citar: Uniforme, Normal, Exponencial, Gama, Beta, Lognormal, Weibull, Gumbel. Aqui trataremos apenas das duas primeiras.

3.3.1 Distribuição Uniforme

Quando uma variável aleatória pode tomar qualquer valor numa escala contínua entre dois pontos de tal maneira que nenhum valor seja mais provável que outro, então as probabilidades associadas à variável podem ser descritas pela distribuição uniforme.

Definição: Seja X uma variável aleatória contínua que assume valores no intervalo [a, b]. Se a probabilidade de X assumir valores num subintervalo é a mesma que para qualquer outro subintervalo de mesmo comprimento, então, esta variável tem distribuição uniforme.

O exemplo anterior do ponteiro se enquadra nessa categoria.

- **Função de probabilidade**

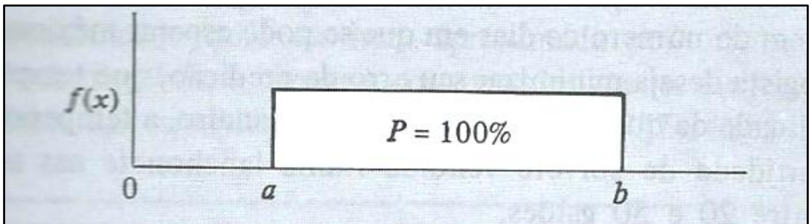
De modo geral, se X e uma variável aleatória contínua que tem distribuição uniforme, então sua função densidade de probabilidade será:

$$P(c \leq x \leq d) = \frac{d - c}{b - a}$$

onde:
[a, b] é o intervalo no qual a v.a. está definida (total de possibilidades)
[c, d] é o intervalo referente ao evento que se quer calcular a probabilidade.

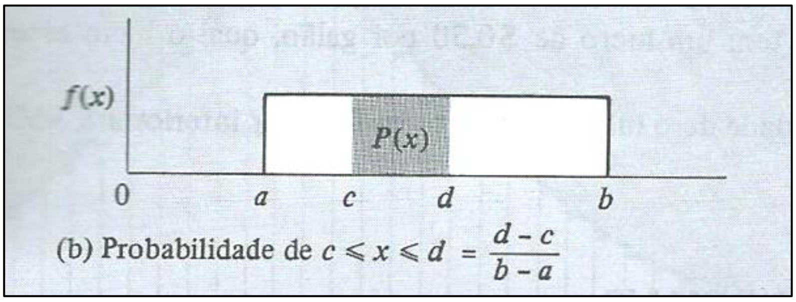
- Valor Esperado: $E(x) = \mu = \dfrac{a + b}{2}$
- Variância: $\sigma^2(x) = \dfrac{(b - a)^2}{12}$

Graficamente, a distribuição é representada como um retângulo limitado por pontos **a** e **b**, que representam o intervalo de valores possíveis.A altura do retângulo é considerada como sendo 1, e a área é considerada 100%.



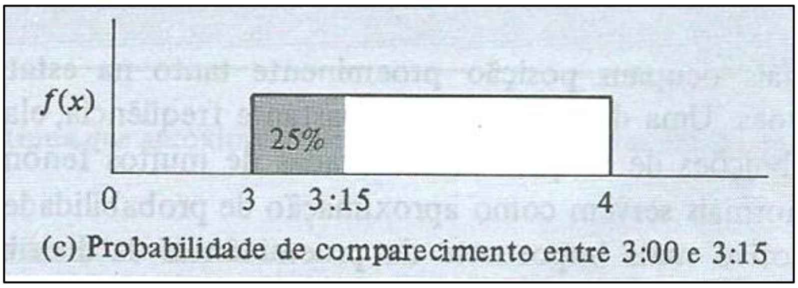
(a) A distribuição uniforme

Assim, a área sob o retângulo, entre dois pontos **c** e **d**, é igual a porcentagem da área total compreendida entre **c** e **d**.



Exemplo 1: Suponhamos que um vendedor compareça ao escritório de sua firma diariamente entre 3:00 e 4:00 horas, e que nenhum momento seja mais provável que qualquer outro neste intervalo de tempo. Daí se quisermos calcular a probabilidade do vendedor comparecer ao escritório entre 3:00 e 3:15 fazemos

$$\boldsymbol{P}(3:00 \leq \boldsymbol{x} \leq 3:15) = \frac{3:15 - 3:00}{4:00 - 3:00} = \frac{15 \text{ minutos}}{1 \text{ hora}} = \frac{15 \text{ minutos}}{60 \text{ minutos}} = 0{,}25 = 25\%$$



Já a probabilidade de o comparecimento ocorrer precisamente às 3:15 é considerada aproximadamente zero.

Atenção! Quando dizemos que uma probabilidade é aproximadamente zero não significa que tal ocorrência seja impossível.

Exemplo 2: Um entreposto comercializa diariamente entre 100 e 200 toneladas de um cereal, com distribuição uniforme de probabilidades. Sabe-se que o ponto de equilíbrio para esta operação corresponde a uma venda de 130 toneladas por dia. Calcule:

a) O valor médio das vendas diárias.
b) A variância e o desvio padrão da distribuição.
c) A probabilidade de o comerciante realizar prejuízo em determinado dia.

Solução:

a) $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{100 + 200}{2} = 150$

b) $\sigma^2(\boldsymbol{x}) = \dfrac{(200 - 100)^2}{12} = \dfrac{10.000}{12} = 833{,}33 \quad \Rightarrow \quad \sigma(\boldsymbol{x}) = \sqrt{833{,}33} = 28{,}87$

c) $\boldsymbol{p}(100 < \boldsymbol{x} < 130) = \dfrac{130 - 100}{200 - 100} = \dfrac{30}{100} = 0{,}3 = 30\%$

3.4 EXERCÍCIOS (PARTE 2)

24. As vendas de gasolina num depósito de atacado acusam média de 40.000 galões diários, com um mínimo de 30.000 galões. Supondo adequada a distribuição uniforme

a) Determine a venda diária máxima;
b) Qual a percentagem do número de dias em que a venda excede 34.000 galões?

25. Uma pequena firma corta e vende lenha para lareiras. O comprimento dos toros varia uniformemente entre 2 e 3 metros.

a) Qual o comprimento médio de um toro?
b) Qual o desvio padrão para essa distribuição?
c) Qual a probabilidade de um toro
i) ser maior que 2,6 metros? ii) ser inferior a média? iii) ter entre 2 e 3 metros?
iv) ter mais de 3 metros? v) ter exatamente 2 metros?

26. Se uma variável aleatória tem distribuição uniforme, qual é a probabilidade de que a variável assuma um valor maior que a média?

27. Suponha que a temperatura máxima, em janeiro, em certa zona rural (do hemisfério norte) tenha, no passado, variado uniformemente entre 0ºC e 6ºC.

a) Qual a percentagem do número de dias em que se pode esperar máxima acima de 3,5ºC?
b) Se um meteorologista deseja minimizar seu erro de predição, que temperatura deve prever?
c) Qual é a probabilidade de que, num dia qualquer de janeiro, a temperatura não exceda 1ºC?

28. Sabe-se que a quantidade de sorvete vendida numa lanchonete nas terças-feiras tem distribuição uniforme entre 20 e 50 picolés.

a) Qual a probabilidade de venda de 40 picolés ou mais numa terça-feira?
b) Qual a probabilidade de venda de 40 picolés ou mais numa segunda-feira?
c) Se a lanchonete tem um lucro de $0,30 por picolé, qual o lucro esperado nas vendas de uma terça-feira?
d) Qual a probabilidade de o lucro de uma terça-feira ser inferior a $7,50?

29. Uma variável X é uniformemente distribuída no intervalo [10, 20]. Determine:

a) valor esperado e variância de X;
b) $P(12,31 < X < 16,50)$.

30. Em uma faculdade, as idades dos alunos são uniformemente distribuídas entre 20 e 48 metros. Encontre a probabilidade de um aluno escolhido ao acaso ter:

a) entre 20 e 48 anos b) mais que 35 anos c) menos que 22 anos
d) entre 27 e 34 anos e) menos que 43 anos f) exatamente 39 anos

31. Em relação ao problema anterior, qual a idade esperada de uma aluno desta faculdade?